← fisica

# banks-casher

//Michele Andreoli, 2026/11/02 21:16 //

# Intro

Consideriamo la funzione di ripartizione per una generica teoria di gauge:

$$Z=\langle e^{-\int d^{4}x\overline{\psi}(D+m)\psi}\rangle_{FG}$$

dove ho indicato con:

$$\langle\cdots\rangle_{F}=\int\mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\cdot(\cdots)\quad\langle e\cdots\rangle_{G}=\int\mathfrak{D}A\cdot e^{-S_{G}}(\cdots)$$

rispettivamente l'integrazione sui campi fermionici $\psi$ e quella sui campi $A_{\mu}$.

L'azione dei campi di gauge è $S_{G}[A_{\mu}]$:

$$S_{G}=\frac{1}{2}\int d^{4}x\cdot Tr[F^{2}_{\mu\nu}]$$

con le solite notazioni: $$\begin{aligned} F_{\mu,\nu} & = & \partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}+ig\cdot[A_{\mu},A_{\nu}]\\ A_{\mu} & = & \sum_{a}A^{a}_{\mu}\cdot T^{a} \end{aligned}$$

$T^{a}$ sono le matrici di base per l'algebra del gruppo di Lie della teoria, soddisfacenti le condizioni di normalizzazione:

$$Tr[T^{a}T^{b}]=\frac{1}{2}\delta_{ab}\quad a,b=1\ldots N$$

L'operatore di Dirac euclideo $D$ è:

$$D=D(A)=\slashed{\partial_{E}}+ig\cdot\slashed{A}=\gamma^{\mu}_{E}(\partial^{\mu}_{E}+ig\cdot A^{\mu}(x))$$

e le matrici di Dirac euclidee sono date da:

$$\gamma_{0}=\gamma^{4}_{E}\qquad\overrightarrow{\gamma}=-i\overrightarrow{\gamma_{E}}$$

L'integrazione sui campi $\psi$ si può scrivere in forma chiusa usando le variabili di Grassmann, e il risultato è il determinante della parte quadratica della lagrangiana:

$$\langle e^{-\int d^{4}x\overline{\psi}(D+m)\psi}\rangle_{FG}=\langle|D(A)+m|\rangle_{G}=\langle e^{Tr[Ln[D+m]]}\rangle_{G}$$

# condensato chirale

Volendo calcolare il valore medio di una quantità come $\overline{\psi}\psi$, il sistema più semplice è derivare rispetto a $-m$ il logaritmo di Z, e dividere per il volume di normalizzazione V [1)]):

$$\langle\overline{\psi}\psi\rangle=\frac{1}{V}\cdot\frac{\partial Z}{Z\partial{(-m)}}=\langle\int\frac{d^{4}x\overline{\psi}(x)\psi(x)}{V}\rangle_{G}=-\frac{1}{V}\langle Tr[\frac{1}{D(A)+m}]\rangle_{G}$$

Essendo $D=-iD_{M}$ (dove $D_{M}$ è la versione minkowskyana) un operatore antihermitiano, i suoi autovalori sono immaginari puri ($-i\lambda_{n}$), e la traccia si può calcolare esplicitamente:

$$\langle\overline{\psi}\psi\rangle=\frac{1}{V}\sum_{n}\frac{1}{i\lambda_{n}-m}$$

Introducendo $\rho(\lambda)d\lambda=\frac{dn}{V}$ come ”numero di autostati per unità di volume compresi in dk”, si ha:

$$\frac{1}{V}\sum_{n}\frac{1}{i\lambda_{n}-m}=\int\frac{\rho(\lambda)d\lambda}{i\lambda-m}=\int\frac{\rho(\lambda)\cdot(-i)\cdot d\lambda}{\lambda+i\cdot m}$$

Nel limite chirale ($m\rightarrow0$), possiamo usare la nota formula [2)]):

$$\frac{1}{x+i\epsilon}=\mathcal{P}\frac{1}{x}-i\pi\delta(x)\quad\epsilon\rightarrow0$$

con $m=\epsilon$, e scrivere:

$$\langle\overline{\psi}\psi\rangle=\int\rho(\lambda)\cdot(-i)\cdot(-i\pi\delta(\lambda))d\lambda=-\pi\int\rho(\lambda)\delta(\lambda)d\lambda=-\pi\cdot\rho(0)$$

Il contributo di $\mathcal{P}\frac{1}{\lambda}$ (parte principale dell’integrale) è stato considerato nullo. Questo perchè, per questioni di simmetria traslazionale dello stato di vuoto, il numero di stati con impulso $\lambda$ coincide con quelli con impulso $-\lambda$ e la funzione $\frac{\rho(\lambda)}{\lambda}$ risulta dunque dispari.

# sviluppo in serie

Sviluppo in serie per $m\to\infty$:

$$\langle\overline{\psi}\psi\rangle=-\frac{1}{V}\langle Tr[\frac{1}{D(A)+m}]\rangle_{G}=-\frac{1}{mV}\sum^{\infty}_{k=0}\frac{(-1)^{k}}{m^{k}}Tr[D^{k}]$$

10

A. Roberge and N. Weiss, *Gauge theories with imaginary chemical potential and the phases of QCD*, *Nucl. Phys.* **B275** (1986) 734.

P. de Forcrand and O. Philipsen, *The QCD phase diagram for small densities from imaginary chemical potential*, *Nucl. Phys.* **B642** (2002) 290–306, [ hep-lat/0205016].

M. D'Elia and F. Sanfilippo, *The Order of the Roberge-Weiss endpoint (finite size transition) in QCD*, *Phys.Rev.* **D80** (2009) 111501, [arXiv:0909.0254].

M. D'Elia and F. Sanfilippo, *Thermodynamics of two flavor QCD from imaginary chemical potentials*, *Phys.Rev.* **D80** (2009) 014502, [arXiv:0904.1400].

P. de Forcrand and O. Philipsen, *Constraining the QCD phase diagram by tricritical lines at imaginary chemical potential*, *Phys.Rev.Lett.* **105** (2010) 152001, [ arXiv:1004.3144].

M. D'Elia and M.-P. Lombardo, *Finite density QCD via imaginary chemical potential*, *Phys. Rev.* **D67** (2003) 014505, [hep-lat/0209146].

M. D'Elia and M. P. Lombardo, *QCD thermodynamics from an imaginary $\mu_B$: Results on the four flavor lattice model*, *Phys.Rev.* **D70** (2004) 074509, [ hep-lat/0406012].

M. D'Elia, F. Di Renzo, and M. P. Lombardo, *The strongly interacting quark gluon plasma, and the critical behaviour of QCD at imaginary $\mu$*, *Phys.Rev.* **D76** (2007) 114509, [arXiv:0705.3814].

K. Nagata and A. Nakamura, *Imaginary Chemical Potential Approach for the Pseudo-Critical Line in the QCD Phase Diagram with Clover-Improved Wilson Fermions*, *Phys.Rev.* **D83** (2011) 114507, [arXiv:1104.2142].

A. M. Ferrenberg and R. H. Swendsen, *Optimized Monte Carlo analysis*, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1195–1198.

A. Alexandru and U. Wenger, *QCD at non-zero density and canonical partition functions with Wilson fermions*, *Phys.Rev.* **D83** (2011) 034502, [arXiv:1009.2197].

K. Nagata and A. Nakamura, *Wilson Fermion Determinant in Lattice QCD*, *Phys.Rev.* **D82** (2010) 094027, [arXiv:1009.2149].

A. Alexandru, M. Faber, I. Horváth, and K.-F. Liu, *Lattice QCD at finite density via a new canonical approach*, *Phys.Rev.* **D72** (2005) 114513, [ hep-lat/0507020].

A. Li, A. Alexandru, and K.-F. Liu, *Critical point of $N_f = 3$ QCD from lattice simulations in the canonical ensemble*, *Phys. Rev.* **D84** (2011) 071503, [ arXiv:1103.3045].

1)
NB: il propagatore $\langle\psi\overline{\psi}\rangle$avrebbe segno opposto, dato che questi campi anticommutano

2)
vedi Landau, *Fisica Cinetica*

From:
https://eliofabri.eu/ - **Elio Fabri Discussion Forum**

Permanent link:
**https://eliofabri.eu/doku.php?id=gruppi:fisica:banks-casher&rev=1793654526**

Last update: **2026/11/02 21:22**